熱電子放出の実験

注意: 表 1, 表 2, 表 3, 表 4 は当日配布する。

1　目的

二極管の陰極温度と飽和陽極電流を測定し、これをもとに陰極表面の仕事関数を求める。

2　解説

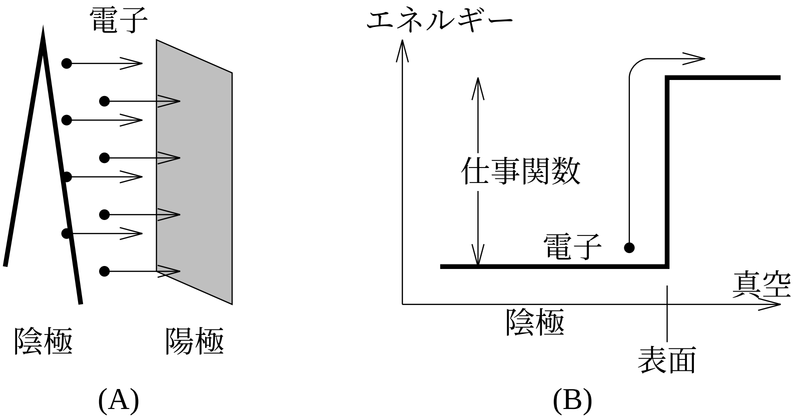

図 1: (A) 熱電子放出, (B) 陰極近傍のエネルギー準位

金属中の電子は、常温では金属内部に閉じ込められていて外に飛び出すことはほとんどない[*]。これは図 1(B) のように、金属の表面にはエネルギー障壁 (仕事関数と呼ばれる) があるためである[†]。高温になるとその熱エネルギーにより、相当数の電子が障壁を越えるエネルギーをもつようになり、電子放出が観測されるようになる。

単位面積あたり放出される電子数 n_D(個/m^2) は、量子力学を用いた計算より

$$n_D = 2\frac{\sqrt{(2\pi mkT)^3}}{h^3}\exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \tag{1}$$

とあらわされる。ここに、

$$\begin{aligned} m &: \text{電子の質量}, 9.1093897 \times 10^{-31}(\mathrm{kg}) \\ k &: \text{ボルツマン定数}, 1.380658 \times 10^{-23}(\mathrm{J/K}) \\ h &: \text{プランク定数}, 6.6260755 \times 10^{-34}(\mathrm{J \cdot s}) \end{aligned}$$

[*]常温でも光電子放出や放射線照射による電子放出その他は起こる。

[†]金属内部の電子のエネルギーはフェルミ分布にしたがうため、常温 [$kT = 0.0258$(eV)] では伝導電子のほとんどがフェルミ準位付近にあり、金属表面のエネルギー障壁 [数 eV] を乗り越えるだけのエネルギーをもった電子はほとんどない。

T　:　陰極の温度 (K)
Φ　:　陰極表面の仕事関数 (J)

である。電流密度 $i_x(\mathrm{A/m^2})$ は電子の平均速度$\overline{|v_x|}(\mathrm{m/s})$ をもちいて、

$$i_x = \frac{1}{2} e \cdot n_D \cdot \overline{|v_x|} \tag{2}$$

とあらわされる。ここに、

$$\begin{aligned} e &: \text{電子の電荷}, 1.60217733 \times 10^{-19}(\mathrm{C}) \\ \overline{|v_x|} &= \sqrt{\frac{2kT}{m\pi}} \end{aligned}$$

である。これらよりリチャードソン–ダッシュマン (Richardson-Dushman) の式

$$i_x = \frac{4\pi emk^2}{h^3} T^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \tag{3}$$

が得られる。陰極の面積を Sとすると、飽和陽極電流 I_a(A) は、式 (3) を変形して、

$$\log_{10}\left(\frac{I_a}{T^2}\right) = -\frac{1}{2.303}\frac{\Phi}{k}\cdot\frac{1}{T} + \log_{10}\left(\frac{4\pi emk^2 S}{h^3}\right) \tag{4}$$

と表される。したがって、陰極温度 Tおよび飽和陽極電流 I_aを測定し、横軸を $1/T$、縦軸を $\log_{10}(I_a/T^2)$ として実験データをグラフにすると、陰極の仕事関数は、<u>グラフの傾き</u>として現れることがわかる (これをリチャードソンプロットという)。

3　実験操作

タングステン陰極またはトリウム–タングステン陰極をもった、二種類の二極管を用いて実験をおこなう。最初にタングステン陰極の場合をひととおり測定してから、同様にしてトリウム–タングステン陰極の場合を測定する。

1. 回路図に従って実験回路を組み立てる。測定値を表 1 (トリウム–タングステン陰極の場合は表 3) に書き込んでいく。以下、陰極のことを “ヒーター” と書いている場合もあるので注意すること。
   - 電源コンセントは、回路が間違いなく組み立ててあることを確認してから差し込むこと。
   - 交流電圧計[‡]は 10A レンジにする。直流電流計 (デジタルテスター) は主に 20mA のレンジを使い、必要に応じて 2mA のレンジに切り替えて使う。
   - 電源スイッチをいれる前に、ヒーター電源のスライダックおよび陽極電源の電圧調整つまみが 0 になっていることを確認する。
2. ヒーター電流 I_h対陰極温度 Tの測定

[‡]可動鉄片型、水平置きにして使うタイプ。

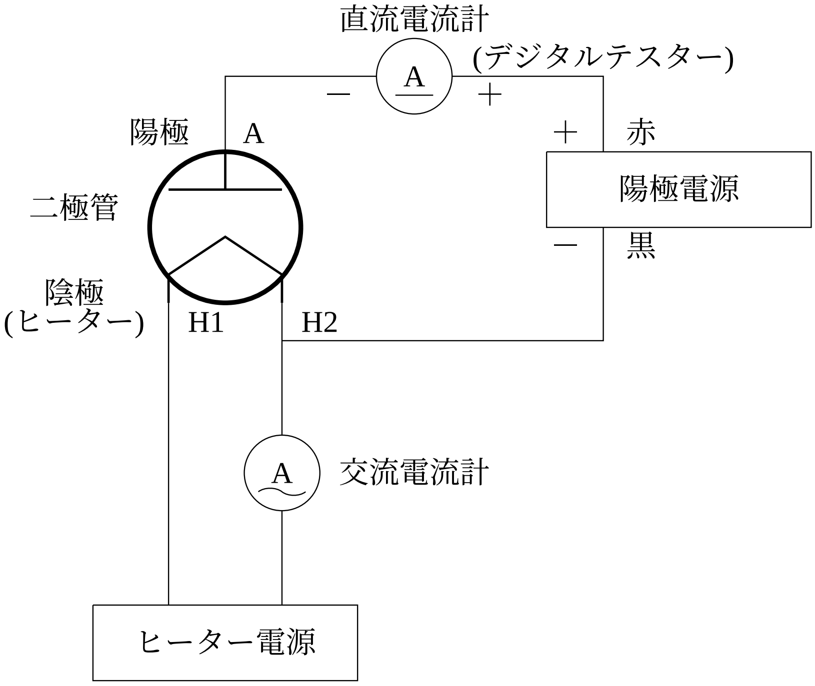

図 2: 測定回路図

(a) ヒーター電源をいれ、スライダックを**ゆっくり**回してヒーターに電流を流し、陰極を加熱する。このとき、電流が流れてもすぐには加熱されないので注意すること。徐々に電流を増し、タングステン陰極の場合は 8.0A(トリウム–タングステン陰極の場合は 5.0A) で一定にする。

(b) パイロメーター (光高温計)[§]を用いて陰極の温度を測定する。8.0A のときの陰極温度を測定したら、徐々に電流を減し、7.5A, 7.0A, 6.5A, 6.0A の各電流のときの陰極温度を測定する (トリウム–タングステン陰極の場合は、5.0A, 4.5A, 4.0A, 3.5A, 3.0A の各電流について陰極温度を測定する)。パイロメーターは使い終ったら測定つまみを反時計方向いっぱいに回して電源を切っておくこと。

パイロメーターの使い方

i. 対物レンズを回して最大に引出し、架台にセットする。
ii. 接眼レンズをのぞきながら二極管とパイロメーターとの距離を調整し、ヒーターにフォーカスが合うようにする。
iii. 接眼レンズを引出し、パイロメーターの中のフィラメントがはっきり見えるようにする。
iv. 接眼レンズ側に赤フィルターを挿入する。
v. パイロメーターの測定つまみを回し、ヒーターの色とパイロメーターの中のフィラメントの色が同じになるようにする。温度によって測定レンジを切り替えること (L:低温 [700–1500 °C], H:高温 [1200–2000 °C]) 。

[§]物体を高温にすると温度に対応した色で発光する。この色の変化を利用して温度を計るための装置で、望遠鏡, 電球および電球に流れる電流を測定する電流計が組み合わせてある。

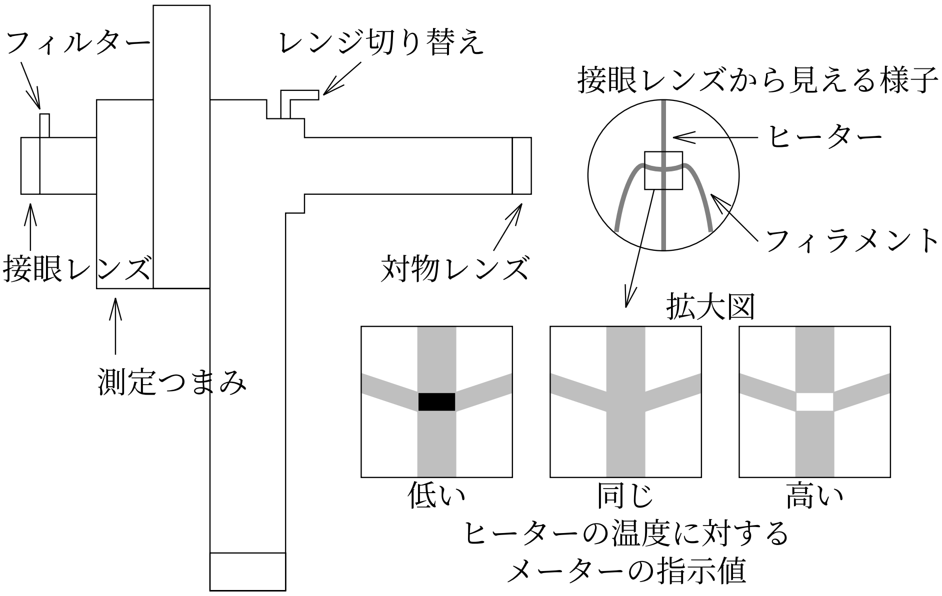

図 3: パイロメーター

vi. パイロメーターの指示値がヒーターの温度よりも低い場合には、パイロメーターのフィラメントのほうがヒーターよりも暗く見える。

vii. パイロメーターの指示値がヒーターの温度よりも高い場合には、パイロメーターのフィラメントのほうがヒーターよりも明るく見える。

viii. パイロメーターの指示値がヒーターの温度と同じ場合には、パイロメーターのフィラメントとヒーターの色は同じに見え、区別できない。

3. 陽極電圧 V_a対陽極電流 I_aの測定

(a) ヒーター電流を 8.0A(トリウム–タングステン陰極の場合は 5.0A) にする。

(b) デジタルテスターが 20mA のレンジにあることを確認する。

(c) 陽極電源のスイッチを入れ、徐々につまみを回し、350V (350Vまで上がらない場合は 50V 刻みでキリのいい電圧) にあわせる。

(d) このときの陽極電流を測定する。

(e) 陽極電圧を 350, 300, 250, 200, 150, 100, 50, 30, 10, 0V に変えて陽極電流を測定する (必要に応じてテスターのレンジを切り替えること)。

(f) 250V 以上では陽極電流が飽和することを確認すること。

4. ヒーター電流 I_h対飽和陽極電流 I_aの測定

(a) ヒーター電流を 8.0A(トリウム–タングステン陰極の場合は 5.0A) にする。

(b) デジタルテスターが 20mA のレンジにあることを確認する。

(c) 陽極電源のスイッチを入れ、徐々につまみを回し、250V にあわせる。

(d) このときの陽極電流を測定する。

(e) ヒーター電流を 8.0A, 7.5A, 7.0A, 6.5A, 6.0A (トリウム–タングステン陰極の場合は 5.0A, 4.5A, 4.0A, 3.5A, 3.0A) にし、陽極電圧を 250V にあわせて陽極電流を測定する (必要に応じてテスターのレンジを切り替えること)。

5. トリウム–タングステン陰極の場合も、タングステン陰極の場合と同様にしてヒーター電流対陰極温度、陽極電圧対陽極電流、陰極温度対陽極電流の特性を測定する。**回路を組み変えるときはヒーター電源、陽極電源のスイッチが切ってあることを必ず確認すること。**

4 測定データの整理

最初に、測定値のうち陰極温度、陽極電圧 250V のときの陽極電流 I_aを表 2, 表 4に書き写しておき、以下のグラフを作るときの計算に利用すること。このとき陽極電流は mA を単位として測定しているので 10^{-3}を乗ずるのを忘れないように。

4.1 ヒーター電流 I_hと陰極温度 Tの関係

測定した陰極温度を絶対温度に変換し¶、横軸にヒーター電流 I_h、縦軸に絶対温度 Tをとりグラフ化する。データを最小二乗法 (付録 A参照) をつかって処理し、データを近似する直線の方程式 $y = ax + b$ を求め、グラフに直線を書き込む (図 4)。

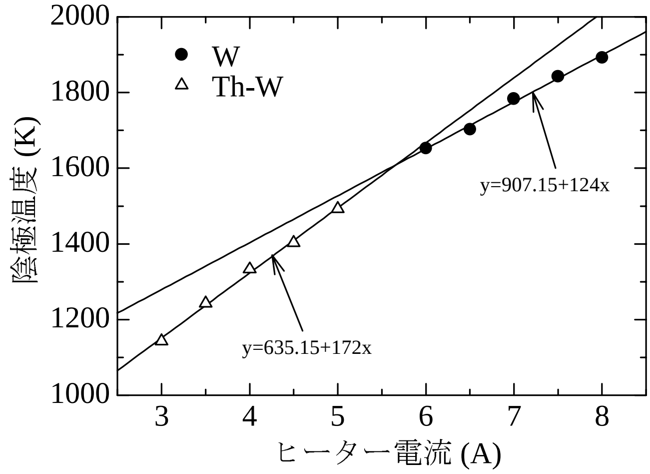

図 4: I_h–Tグラフの例

4.2 陽極電圧 V_aと陽極電流 I_aの関係

横軸に陽極電圧 V_a、縦軸に陽極電流 I_aをとり、陽極電圧と陽極電流の関係をグラフ化する (図 5)。

¶絶対温度 (K) = 摂氏温度 (°C) + 273.15

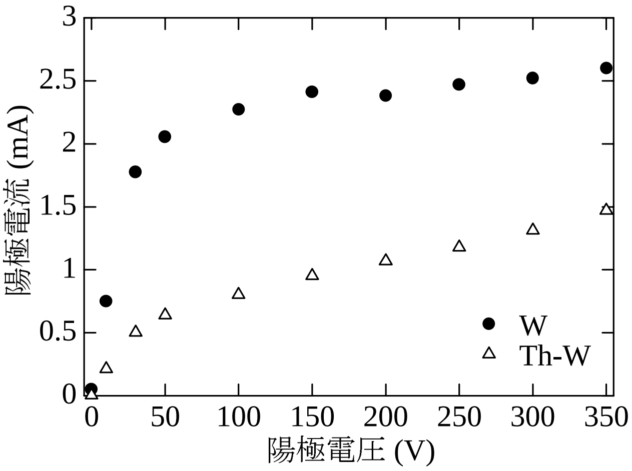

図 5: V_a–I_aグラフの例

4.3 リチャードソンプロット

測定データから $1/T$, $\log_{10}(I_a/T^2)$ を計算し、表を完成させ、$1/T$ を x 軸、$\log_{10}(I_a/T^2)$ を y 軸にしてグラフ化する (図 6)。このデータを最小二乗法を用いて処理し、データを近似する直線の方程式 $y = ax + b$ を求めグラフに直線を書き込む。式 (4) より傾き a は、

$$a = -\frac{1}{2.303}\frac{\Phi}{k} \tag{5}$$

を満たすから、仕事関数はジュールを単位として、

$$\Phi = -2.303ka \tag{6}$$

とあらわされる。これを電子ボルト (eV) 単位に変換するには電子の電荷 e で割ればよいから、

$$\Phi = \frac{-2.303ka}{e} \tag{7}$$

となる。これを用いて仕事関数を計算する。

5 実験報告書に含まれるべき内容

- 測定データをまとめた表
- グラフを描く際に作った計算表
- ヒーター電流 I_h対陰極温度 Tのグラフ
- 陽極電圧 V_a対陽極電流 I_aのグラフ
- リチャードソンプロット
- 計算により得られたタングステンおよびトリウム–タングステンの仕事関数の値

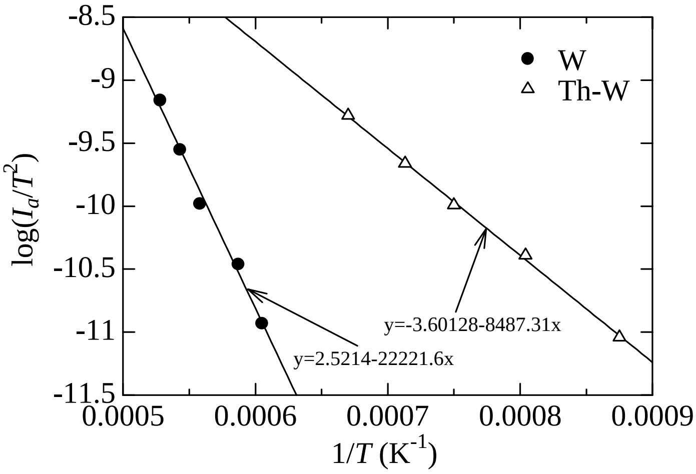

図 6: リチャードソンプロットの例

6　考察すべき事柄

詳しい測定によれば、タングステンの仕事関数は 4.52eV であるという。この実験で得たタングステンの仕事関数の値の有効桁数が何桁あるかを考え、それをふまえて今回の実験で得たタングステンの仕事関数の値が妥当なものかどうか考察せよ (付録 B参照)。

7　参考文献

“真空管工学”, “電子管工学”, “電子工学”, “固体物理学” 等の表題の本の二極管, 熱電子放出, 電子放出の項目が参考になる。

A　最小二乗法について

A.1　理論

多数の測定点があった場合に、そのデータに一番フィットした曲線を見つけるための方法のひとつ。ここでは説明を簡単にするため、一番フィットした直線を計算する場合について説明する。

図 7のように測定点が A, B, Cの 3 点ある場合を考える。l, m, n の三本の直線のなかでは、m の直線が一番測定点にフィットしていると言える。

直線 $m : y = ax + b$ と点 $A(X_1, Y_1)$ の Y軸に沿った距離 d_1は、

$$d_1 = |(aX_1 + b) - Y_1| \tag{8}$$

と書ける。同様に、d_2, d_3は、

$$d_2 = |(aX_2 + b) - Y_2| \tag{9}$$

$$d_3 = |(aX_3 + b) - Y_3| \tag{10}$$

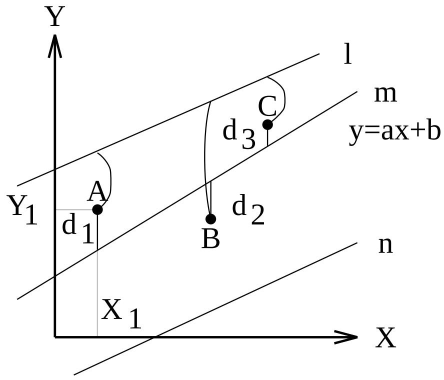

図 7: 最小二乗法

となる。ここで、「一番フィットした直線」とは「距離の二乗の和が最小となる直線」のことだと考える*(直線 l と直線 m を見比べてみよ) と、距離の二乗和 S は、

$$\begin{aligned} S &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \\ &= ((aX_1 + b) - Y_1)^2 + ((aX_2 + b) - Y_2)^2 + ((aX_3 + b) - Y_3)^2 \\ &= a^2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + 3b^2 + (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) \\ &\quad +2ab(X_1 + X_2 + X_3) - 2b(Y_1 + Y_2 + Y_3) - 2a(X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3) \end{aligned} \tag{11}$$

とあらわすことができる。さて、ここで直線が $l \to m \to n$ のように移動する場合を考えると、距離の二乗和 S は大 $\to$ 小 $\to$ 大のように変化するはずであるから、S の最小値は極小値であることがわかる。極小値をもつ点での微分の値は 0 だから、

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

が成り立つ。これを計算すると、

$$\begin{cases} (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)a & + & (X_1 + X_2 + X_3)b & = (X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3) \\ (X_1 + X_2 + X_3)a & + & 3b & = (Y_1 + Y_2 + Y_3) \end{cases} \tag{13}$$

という a, b についての二元連立方程式が得られる。これを解けば、3 点にもっともフィットした直線 $y = ax + b$ がわかることになる。

一般に n 点ある場合には、

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)a & + & \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)b & = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)a & + & \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)b & = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases} \tag{14}$$

の連立方程式を解けば、n 個の点にフィットする直線 $y = ax + b$ がえられる。

---

*最小二乗法という名前の由来

A.2 実際の計算法

実験値を実際に最小二乗法を用いて処理しようとすると (ちょっとやってみればわかるが) 結構たくさんの計算を必要とする。

しかしラッキーなことに、通常、関数電卓には「二変数統計」または「回帰分析」と呼ばれる機能がついていて、これを利用することにより直線に対する最小二乗処理は簡単に行うことができる。詳しくは各自の電卓のマニュアルを参照するように[†]。マニュアルを読んでも使い方が解らない場合には “マニュアル持参で” 質問にくること。

B 有効数字について

B.1 例

たとえば有効数字が3桁の円周率 $3.1\dot{4}$と、有効数字が2桁の自然対数の底 $2.\dot{8}$の間の四則演算をした場合、結果の有効数字がどうなるかは義務教育課程で既に学んでいるが、ここで一応復習しておく。

$$
\begin{aligned}
3.1\dot{4} + 2.\dot{8} &= 5.\dot{9} \qquad (15)\\
3.1\dot{4} - 2.\dot{8} &= 0.\dot{3} \qquad (16)\\
3.1\dot{4} \times 2.\dot{8} &= 8.\dot{8} \qquad (17)\\
3.1\dot{4} \div 2.\dot{8} &= 1.\dot{1} \qquad (18)
\end{aligned}
$$

B.2 理論

有効数字の考え方は、不等式によって厳密に扱うことができる。有効数字が3桁の値 $3.1\dot{4}$ (以下 $\dot{\pi}$ とかく) と2桁の値 $2.\dot{8}$ (以下 $\dot{e}$ とかく) というのは、実は真の値 π, e が

$$
\begin{aligned}
3.135 \;\leq\; &\pi \;< 3.145 \qquad (19)\\
2.75 \;\leq\; &e \;< 2.85 \qquad (20)
\end{aligned}
$$

の範囲にある、ということをあらわしている。これより例えば二数の和は、

$$
\begin{aligned}
(\dot{\pi} + \dot{e}\text{のとりうる最小値}) \leq\; &\pi + e \;< (\dot{\pi} + \dot{e}\text{のとりうる極大値}) \qquad (21)\\
3.135 + 2.75 \leq\; &\pi + e \;< 3.145 + 2.85 \qquad (22)\\
5.885 \leq\; &\pi + e \;< 5.995 \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となり、5.885 から 5.995 の範囲にあることがわかる。式 (23) を式 (15) の結果、

$$
5.85 \leq 5.\dot{9} < 5.95 \qquad (24)
$$

と比較すると微妙に範囲が異なっていることに注意して欲しい。

[†]統計計算、回帰計算等の項目になっている場合もある。

式 (23) と同様なことを減算、乗算、除算についても計算すると、

$$3.135 - 2.85 = 0.285 \leq \quad \pi - e \quad < 0.395 = 3.145 - 2.75 \tag{25}$$

$$3.135 \times 2.75 = 8.621 \leq \quad \pi \times e \quad < 8.963 = 3.145 \times 2.85 \tag{26}$$

$$3.135 \div 2.85 = 1.100 \leq \quad \pi \div e \quad < 1.144 = 3.145 \div 2.75 \tag{27}$$

という結果が得られる。

関数を使った場合の有効数字の考え方を $\log_{10} \dot{\pi}$ を例にとって説明する。$\log_{10}$は単調増加*な関数であるから、

$$\log_{10} 3.135 \leq \quad \log_{10} \pi \quad < \log_{10} 3.145 \tag{28}$$

$$0.496238 \leq \quad \log_{10} \pi \quad < 0.497621 \tag{29}$$

となり、$\log_{10} \pi$の真の値は 0.496238 から 0. 497621の範囲内にあることがわかる。

*関数が単調減少であれば引数の極大値と最小値がいれかわる。また変化のしかたが複雑な関数の場合にはもっと複雑になる。この場合は関数のグラフを描いて考えてみればよい。

表 1: 測定値 (タングステン)

タングステン陰極					
ヒーター電流 I_h(A)	8.0	7.5	7.0	6.5	6.0
陰極温度 (°C)					
陽極電圧 V_a(V)	陽極電流 I_a(mA)				
350		—	—	—	—
300		—	—	—	—
250					
200		—	—	—	—
150		—	—	—	—
100		—	—	—	—
50		—	—	—	—
30		—	—	—	—
10		—	—	—	—
0		—	—	—	—

表 2: 計算値 (タングステン)

タングステン陰極					
ヒーター電流 I_h(A)	8.0	7.5	7.0	6.5	6.0
陰極温度 (°C)					
陰極温度 T(K)					
$1/T(\mathrm{K}^{-1})$					
$I_a\|_{V_a=250\mathrm{V}}$(A)					
I_a/T^2					
$\log_{10}(I_a/T^2)$					

ヒーター電流と陰極温度の関係を近似する方程式

$$y = (\qquad\qquad)x + (\qquad\qquad)$$

リチャードソンプロット上のデータ点を近似する方程式

$$y = (\qquad\qquad)x + (\qquad\qquad)$$

表 3: 測定値 (トリウム–タングステン)

トリウム–タングステン陰極					
ヒーター電流 I_h(A)	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0
陰極温度 (°C)					
陽極電圧 V_a(V)	陽極電流 I_a(mA)				
350		—	—	—	—
300		—	—	—	—
250					
200		—	—	—	—
150		—	—	—	—
100		—	—	—	—
50		—	—	—	—
30		—	—	—	—
10		—	—	—	—
0		—	—	—	—

表 4: 計算値 (トリウム–タングステン)

トリウム–タングステン陰極					
ヒーター電流 I_h(A)	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0
陰極温度 (°C)					
陰極温度 T(K)					
$1/T$(K^{-1})					
$I_a\vert_{V_a=250\mathrm{V}}$(A)					
I_a/T^2					
$\log_{10}(I_a/T^2)$					

ヒーター電流と陰極温度の関係を近似する方程式

$$y = (\qquad\qquad)x + (\qquad\qquad)$$

リチャードソンプロット上のデータ点を近似する方程式

$$y = (\qquad\qquad)x + (\qquad\qquad)$$